23. ORIENTATION DES CERCLES DU PLAN EUCLIDIEN

Dans le plan euclidien Π

▲ $\mathcal{C}$ = Cercle de rayon $r \neq 0$

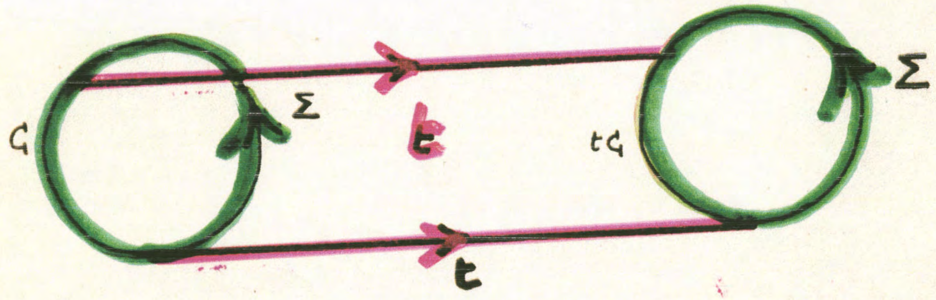
▲ Σ et $-\Sigma$ les deux sens de $\mathcal{C}$ $\quad -(-\Sigma) = \Sigma$

Tout cercle de rayon r est l'image de $\mathcal{C}$ par une translation t

Toute translation t est un homéo $\Pi \to \Pi$

définit un homéo $\mathcal{C} \to t\mathcal{C}$

applique le sens Σ de $\mathcal{C}$ sur un sens de $t\mathcal{C}$ que l'on notera encore Σ ▲



Dès maintenant : tout cercle de rayon r est de sens Σ ou de sens $-\Sigma$

■

96

~~23~~ Orientation des cercles du plan euclidien

$$\boxed{\text{Dans le plan euclidien } \Pi}$$

▶ Ensemble des cercles orientés (de rayon non nul)

● □ L'image d'un cercle orienté
par une similitude
est un cercle orienté

▶ C cercle de rayon non nul
▶ s similitude $C \longrightarrow sC$

✻ s est homéo $C \longrightarrow sC$

⊢ s applique un sens de C
sur un sens de sC (cf. chap. 14) ■

▶ Σ et $-\Sigma$ les deux sens de C $\qquad -(-\Sigma) = \Sigma$

● □ Pour toute symétrie s dont l'axe comprend le centre du cercle orienté C, Σ

$$s\Sigma = -\Sigma$$

■

Autrement dit :

□ L'image par s du cercle orienté C, Σ
est le cercle orienté $C, -\Sigma$ ■

Cercle orienté C, Σ

$$d\Sigma = \Sigma$$

Similitude directe d telle que $dC = C$

Les cercles orientés C_1, Σ_1 et C_2, Σ_2

sont de MÊME SENS

ssi

il existe une similitude directe $C_1, \Sigma_1 \rightarrow C_2, \Sigma_2$

Pour légitimer cette définition, il convient de montrer que la relation ... est de même sens que ... partage l'ensemble des cercles orientés en deux pièces.

Immédiatement : la relation ... est de même sens que ... partage l'ensemble des cercles orientés.

Reste à montrer que ce partage a deux pièces.

▶ C, Σ cercle orienté

□ $C, -\Sigma$ n'a pas le même sens que C, Σ

✱ Pour toute similitude directe d qui applique C sur lui-même

$$d\Sigma = \Sigma \neq -\Sigma$$ ■

□ Tout cercle C', Σ' est de même sens que C, Σ ou que $C, -\Sigma$

▶ s similitude directe $s : C' \rightarrow C$

✱ ou bien $s\Sigma' = \Sigma$

ou bien $s\Sigma' = -\Sigma$ ■

SENS (GIRATOIRE) du plan euclidien

= Pièce de l'équivalence "... EST DE MÊME SENS QUE ..." définie dans l'ensemble des cercles orientés du plan euclidien

PLAN EUCLIDIEN ORIENTÉ

= Plan euclidien muni d'un de ses sens

□ Les similitudes directes conservent le sens

Les similitudes inverses le renversent ..

EX

Le plan euclidien orienté Π, Σ

ORIENTE chacun de ses cercles

ORDONNE chacun de ses cercles épointés,
chacun de ses ensembles pointés de trois points distincts non alignés

ORIENTE chacun de ses cycles

... chacun de ces ensembles orientés ou ordonnés

oriente le plan euclidien .. .

Toute symétrie orthogonale s

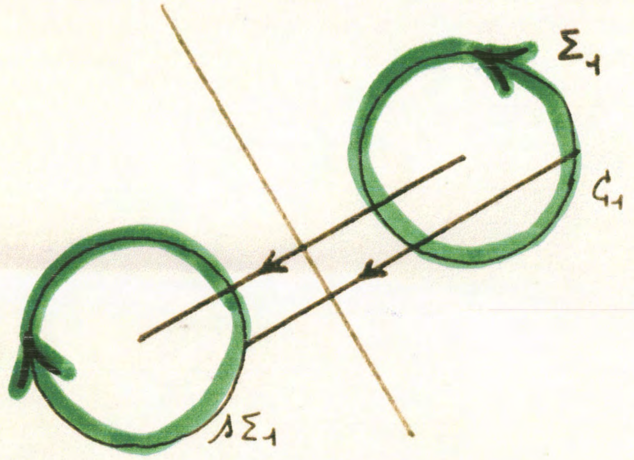
est un auto $\Pi \to \Pi$

applique tout cercle de rayon r sur un cercle de rayon r

est un homéo de tout cercle de rayon r sur un cercle de rayon r

applique le sens Σ_1 du cercle C_1 sur un sens $s\,\Sigma_1$ du cercle sC_1

respecte les lieux définis par les translations.



Pour tout couple de cercles orientés C_1, Σ_1 et C_2, Σ_2

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 \iff s\,\Sigma_1 = s\,\Sigma_2$$

Pour toute symétrie s dont l'axe comprend le centre du cercle orienté C, Σ_1

$$s\,\Sigma_1 = -\,\Sigma_1$$

L'image par s du cercle orienté $\mathcal{C}, \Sigma_1$

est le cercle orienté $s\mathcal{C}, -\Sigma_1$.

Les symétries renversent le sens des cercles orientés de rayon r

Les déplacements conservent le sens des cercles orientés de rayon r

Les retournements renversent le sens des cercles orientés de rayon r

Toute homothétie de rapport non nul est un auto du plan affin Π

est un homéo $\Pi \to \Pi$

applique tout cercle sur un cercle

le sens d'un cercle sur un sens du cercle image

respecte les liens définis par les translations

Seules les homothéties de rapport 1 et -1 appliquent les cercles de rayon r sur des cercles de rayon r. Ces homothéties sont des déplacements et conservent le sens.

Il est donc légitime de convenir que ▽ les homothéties de rapport non nul conservent le sens ▲

4

Σ et $-\Sigma$ désignent les sens d'UN cercle de rayon non nul.

TOUT cercle orienté est de sens Σ ou de sens $-\Sigma$

Similitudes directes conservent le sens.

Similitudes inverses le renversent.

$\boxed{\text{L'orientation d'un cercle, oriente tous les cercles de rayon non nul.}}$